HELSINGIN YLIOPISTO — HELSINGFORS UNIVERSITET — UNIVERSITY OF HELSINKI

Tiedekunta Osasto — Fakultet Sektion — Faculty	Laitos — Institution — Department
Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta	Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Tekijä — Författare — Author

Aapo Rantalainen

Työn nimi — Arbetets titel — Title

Avaruuden $L^1(\mathbb{R}^n)$ differentioivien kantojen ominaisuuksista

Oppiaine — Läroämne — Subject

Matematiikka

Työn laji — Arbetets art — Level	Aika — Datum — Month and year	Sivumäärä — Sidoantal — Number of pages
Pro gradu	Kesäkuu 2006	28 s.

Tiivistelmä — Referat — Abstract

Henri Léon Lebesgue esitti vuonna 1910 hyvin tunnetun teoriansa Lebesguen pisteistä. Olkoon funktio $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ja jono avoimia x-keskisiä kuulia, $B(x, r_k) \subset \mathbb{R}^n$, siten että $r_k \to 0$. Tällöin melkein kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$ pätee

$$\lim_{k\to\infty} \fint_{B(x,r_k)} f(y)\ \mathrm{dy} = f(x).$$

Tärkeä kysymys on, voimmeko käyttää avoimien x-keskisten kuulien sijasta muita joukkoja. Vuonna 1927 Harald Bohr ja Constantin Carathédory osoittivat, että tason $\mathbb{R}^2$ suorakaiteet käyttäytyvät paljon huonommin kuin tason neliöt tai ympyrät. Stanislaw Saks (1933) osoitti, että jos f on mitallisen joukon karakteristinen funktio, niin kuulat voidaan korvata kuutioilla. Antoni Zygmund (1934) osoitti, että tämä pätee kaikilla $f \in L^p(\mathbb{R}^n), 1 < p \leq \infty$ ja vuotta myöhemmin Børge Jessenin ja Jósef Marcinkiewiczin kanssa, että tämä pätee myös kaikilla $f \in L(1 + \log^+ L)^{n-1}(\mathbb{R}^n)$. Johon Saks esitti mitallisen funktion $g \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, jolle tämä ei päde, jos kuulat korvataan kuutioilla. Eli yleisessä tapauksessa kuulia ei voi vaihtaa kuutioiksi, vaikka funktion karakteristinen funktio olisikin mitallinen.

Myös tapaukseen $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ liittyy mielenkiintoisia kysymyksiä: voiko kuulien ja kuutioiden tilalla käyttää jotakin muuta kokoelmaa, pitääkö kiinnitetyn pisteen x olla joukon keskipiste, voiko joukko olla epäkonveksi tai jopa epäyhtenäinen?

Tässä työssä tutkimme näitä kysymyksiä ja todistamme muun muassa, että kysymys 'differentioiko kanta funktioavaruuden $L^1(\mathbb{R}^n)$' on ekvivalentti kysymyksen 'toteuttaako kannan maksimaalioperaattori heikon tyypin estimaatin $(1, 1)$' kanssa, kunhan kanta on riittävän siisti.

Avainsanat — Nyckelord — Keywords

Differentioiva kanta, avaruuden $L^1(\mathbb{R}^n)$ differentiointi, Lebesguen piste

Säilytyspaikka — Förvaringsställe — Where deposited

Kumpulan Tiedekirjasto

00014 Helsingin yliopisto

Muita tietoja — Övriga uppgifter — Additional information